Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Сетка заполняется

Для билета

Для билета

Вариант задания 1

№1.

Выберем 6 ячеек.

_ _ _ _ _ _

Будем расставлять в эти ячейки носки и считать, что первые 3 ячейки отвечают за первую ногу [первая - самый верхний носок, вторая - носок по середине, третья - носок снизу], а последние 3 ячейки за вторую ногу.

Тогда без учёта выворачивания носков кол-во искомых способов - это кол-во способов расставить носки в эти 6 ячеек (т.е. кол-во способов переставить Б Б С С Ч Ч), а именно $P_6(2,2,2) = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!}$

С учётом выворачивания наизнанку:

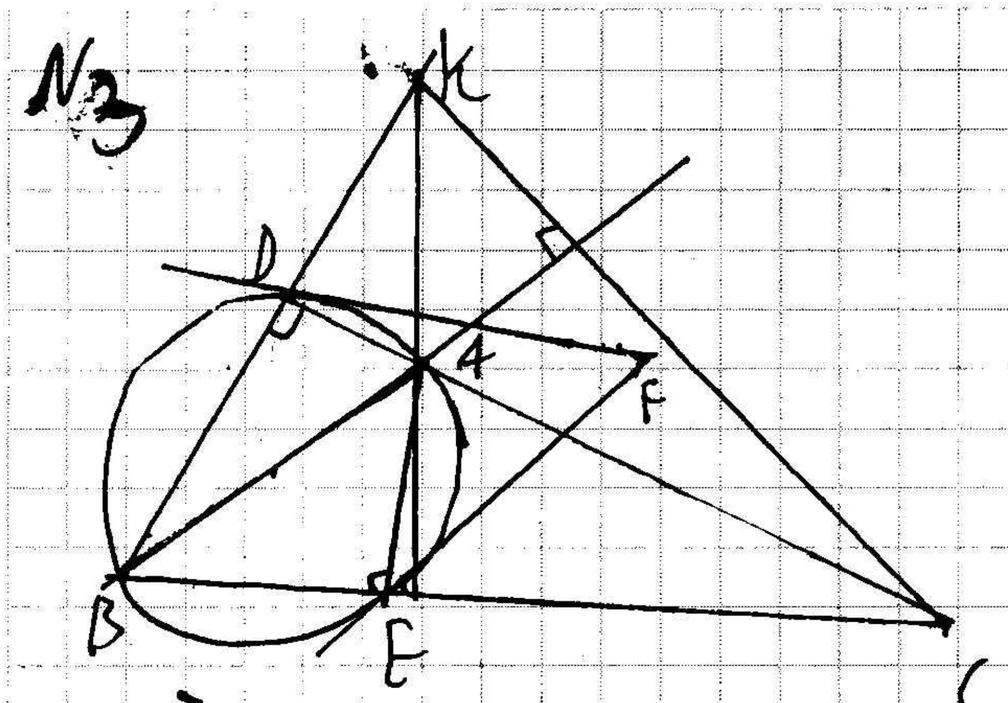
В каждой позиции перестановки у каждого носка есть 2 случая [обычный и вывернутый], т.к всего носков 6, то всего случаев: 2^6.

Тогда искомый ответ: $\frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} \cdot 2^6 = 720 \cdot 8 = 5760$

Ответ: 5760

Можно использовать оборот листа для записи решений

№3



$FD = 2$

$\angle CBD = \arcsin 0{,}6$

1) Заметим, что т.к. $\angle A$ - тупой, то данная ок-ть пересечёт AC (продолжение стороны AC (иначе, т.к. AB - диаметр, то $\angle CAB$ был бы острый), т.к. BC на самой стороне BC.

2) DF, EF - касательные $\Rightarrow \angle FDE = \angle FED = \frac{\overline{DE}}{2} = \angle DBE = \arcsin 0{,}6 = \arccos 0{,}8$

3) По т. Косинусов для $\triangle DFE$:

$EF^2 = DF^2 + DE^2 - 2 \cdot DE \cdot DF \cdot \cos \angle FDE \Rightarrow$

$EF = DF$ (как касательные)

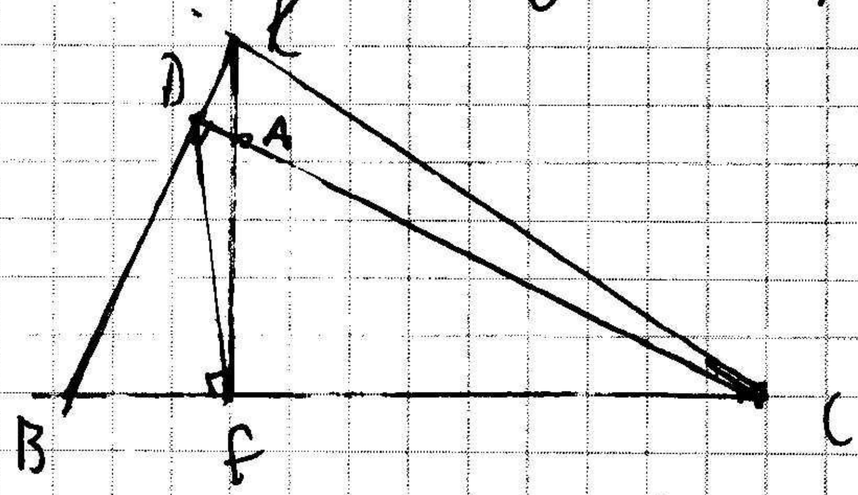
$\Rightarrow DE = 2 \cdot DF \cdot \cos \angle FDE = 2 \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = \frac{48}{5}$

4) AB - диаметр $\Rightarrow \begin{cases} \angle BDA = 90^\circ \\ \angle BFA = 90^\circ \end{cases}$ (вписанный и опир. на диаметр)

5) $\begin{cases} BA \perp CK \text{ (из 4)} \\ AC \perp BK \text{ (из 4)} \end{cases} \Rightarrow A$ - ортоцентр для $\triangle BKC \Rightarrow KA \perp BC$

6) $\begin{cases} KA \perp BC \text{ (из 5)} \\ AF \perp BC \text{ (из 5)} \end{cases} \Rightarrow$ точки K, A, F лежат на одной прямой (иначе из точки A на BC опущено 2 перпендикуляра (!))

Перерисуем картинку:



7) $\angle KDC = \angle KFC = 90^\circ \Rightarrow DKCF$ - вписанный $\Rightarrow \angle BDF = \angle BCK$

8) $\begin{cases} \angle BDF = \angle BCK \\ \angle B \text{ - общий} \end{cases} \Rightarrow \triangle BDE \sim \triangle BCK \Rightarrow \frac{ED}{KC} = \frac{BD}{BC} = \cos \angle CBD = \frac{4}{5}$

olymp.bmstu.ru

Продолжение №3

5) $\frac{FD}{KL} = \frac{4}{5}$ по т. Косинусов $KC = \frac{5}{4} \cdot FD = \frac{5}{4} \cdot \frac{48}{5} = 12$

6) $\angle BDA = \angle BFA = 90° \Rightarrow$ BD ∥ AE - биссектрисы $\Rightarrow \angle KAC \overset{\text{верт.}}{=} \angle DAE = 180° - \angle CBD \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle KAC = \sin\angle CBD = \frac{3}{5}$

7) по т. Синусов для $\triangle KAC$:

$\frac{KC}{\sin\angle KAC} = 2R_{\triangle KAC}$ по $\frac{12}{\frac{3}{5}} = 2R_{\triangle KAC}$ по $R_{\triangle KAC} = 10$

Ответ: $R_{\triangle KAC} = 10$.

№4.

$P(x;y) = x^3 + 8y^3 - 3xy^2 - 6x^2y - x - 2y$

Докажем, что все принимаемые значения данного многочлена делятся на 3

$P(x;y) = x^3 - x + 8y^3 - 2y - 3xy^2 - 6x^2y + x + y =$

$= x(x-1)(x+1) + 2y(2y-1)(2y+1) - 3xy^2 - 6x^2y$

Заметим, что $x-1; x; x+1$ и $2y-1; 2y; 2y+1$ – 3 подряд идущих числа, но тогда среди них точно найдётся число, делящееся на 3, но тогда и их произведение делится на 3, т.е. $x(x-1)(x+1) \vdots 3$ и $2y(2y-1)(2y+1) \vdots 3$, но $3xy^2 \vdots 3$ и $6x^2y \vdots 3$, тогда $x(x-1)(x+1) + 2y(2y-1)(2y+1) - 3xy^2 - 6x^2y \vdots 3$ (как сумма чисел, делящихся на 3).

Таким образом любое из значений, принимаемое данным многочленом делится на 3.

Докажем, что любое натуральное число, делящееся на 3 может быть значением многочлена.

$P(t,y) = t^3 + 8y^3 - 3ts^2 - 6t^2y - t - 2y$

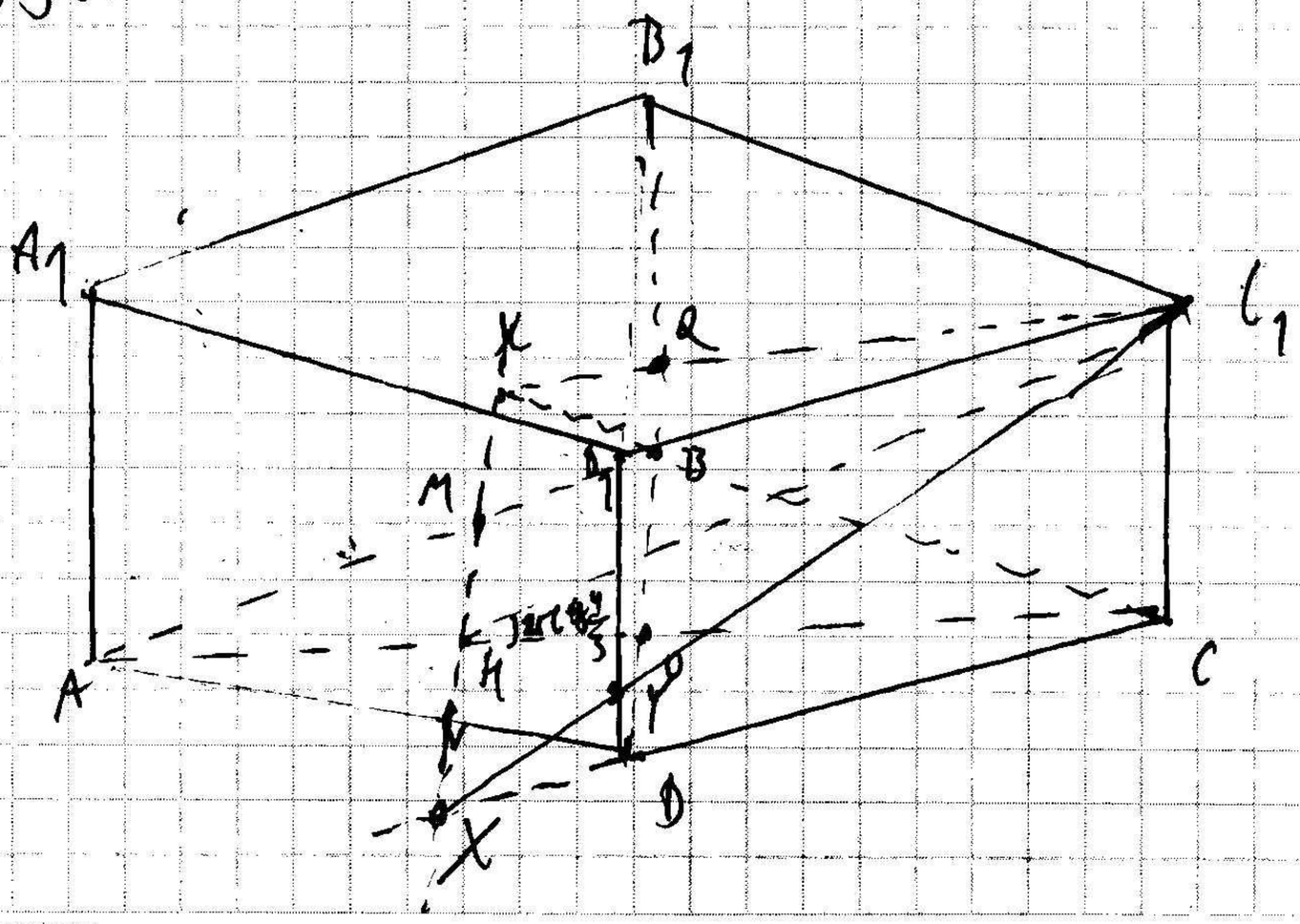
$\forall x = y \quad 3x^3 - 8x^3 - x - 2x = -3x$, т.к. x может быть любым целым числом, то $-3x$ принимает все целые числа, делящиеся на 3, но тогда и многочлен может принимать все целые числа, делящиеся на 3 (например, число 6: $x = y = -2$, число $3k$: $x = y = -k$).

Таким образом мы доказали, что данный многочлен может принимать все значения, делящиеся на 3 и только эти значения.

Тогда искомое количество - это кол-во натуральных чисел, делящихся на 3 от 1 до 10^7. Всего таких чисел: 3333333 (т.к. их столько же, как и чисел, дающих остаток 2 по mod 3 и предшествующих им чисел, дающих остаток 1 по mod 3).

Ответ: 3333333

№5.



olymp.bmstu.ru

Продолжение №3

4) MN – отрезок сечения, лежащий в (ABC), т.к. т.к. сечение $\parallel (BD)$, то $MN \parallel BD$

2) $MN \cap BC = K$; $MN \cap AC = H$; $H_1 \cap BB_1 = Q$; $AC \cap BD = O$

3) $AB = 1$; $OC = a$; $OK = x$

4) $MN \parallel BD \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow AM = \frac{a-x}{a} \Rightarrow$
$\Rightarrow BM = 1 - \frac{a-x}{a} = \frac{x}{a}$

5) ~~$\frac{CL_1}{a+x}$ 5) $\frac{CC_1}{OK+OC} = \frac{1}{1+a} = CC_1$~~

6) $MN \parallel BD \Rightarrow (\beta) \parallel MN$
$(\beta) \parallel BD$

6) $(\beta) \parallel MN$
CB – проекция H_1H на (ABC) $\Big| \xrightarrow{\text{Т. о 3-х перп.}} (\eta) \perp MN$

7) $(\eta) \perp MN$
$(H) \perp MN$ $\Big| \Rightarrow \angle(H_1C_1 = (ABC), (\text{сечение})) = \arctg \frac{4}{3}$

8) $\frac{CC_1}{OK+OC} = \operatorname{tg} \angle(HH_1C) \Rightarrow \frac{CC_1}{a+x} = \frac{4}{3} \Rightarrow CC_1 = \frac{4}{3}(a+x)$

9) $KB \parallel AD \Rightarrow \angle ANM = \angle MKB \overset{\text{т.к. } \triangle AMN - \text{р/б}}{=} \angle KMB \Rightarrow \triangle KBM$ – р/б $\Rightarrow KB = MB = \frac{x}{a}$

10) $\triangle HBQ \sim \triangle HCC_1 \Rightarrow \frac{HB}{BQ} = \frac{HC}{CC_1} \Rightarrow$ (см. ч.1)

$\cos BQ = \frac{\frac{x}{a}}{\frac{4}{3}(a+x)} \cdot \cos BQ = \frac{HB \cdot CC_1}{HC} = \frac{\frac{x}{a} \cdot \frac{4}{3}(a+x)}{\frac{x}{a}+1} \cos BQ = \frac{x \cdot \frac{4}{3}(a+x)}{a+x} = \frac{4}{3}x$

11) По Т. Пифагора
$QC_1 = \sqrt{HC_1^2 - QB^2 + BC^2} = \sqrt{(\frac{4}{3}(a+x) - \frac{4}{3}x)^2 + 1} = \sqrt{\frac{16}{9}a^2 + 1}$

12) По Т. Пифагора:
$MQ = \sqrt{MB^2 + QB^2} = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{16}{9}x^2}$

13) По т. Пифагора:

$$\begin{cases} MH^2 = AM^2 - AH^2 \\ MH^2 = HC^2 - HC^2 \end{cases} \Rightarrow MH^2 = AM^2 - AH^2 + HC^2 = \left|\frac{a-x}{a}\right|^2 - (a-x)^2 + (a+x)^2 =$$

$$\Rightarrow MC^2 = \left|\frac{a-x}{a}\right|^2 + 4ax$$

14) По т. Пифагора:

$$MC_1^2 = MC^2 + CC_1^2 = \left|\frac{a-x}{a}\right|^2 + 4ax + \frac{16}{9}(a+x)^2$$

15) По т. косинусов для ΔMQC_1:

$$MC_1^2 = MQ^2 + 2C_1^2 - 2MQ \cdot 2C_1 \cdot \cos\angle C_1QM$$

$$\Rightarrow 2MQ \cdot 2C_1 \cdot \cos\angle C_1QM = MQ^2 + 2C_1^2 - MC_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MQ^2 \cdot 2C_1^2 \cdot \cos^2\angle C_1QM = \left|\frac{MQ^2 + 2C_1^2 - MC_1^2}{2}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MQ^2 \cdot 2C_1^2 \cdot (1 - \sin^2\angle C_1QM) = \left|\frac{MQ^2 + 2C_1^2 - MC_1^2}{2}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MQ^2 \cdot 2C_1^2 \cdot \sin^2\angle C_1QM = MQ^2 \cdot 2C_1^2 - \left|\frac{MQ^2 + 2C_1^2 - MC_1^2}{2}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4S^2_{\Delta MQC_1} = MQ^2 \cdot 2C_1^2 - \left|\frac{MQ^2 + 2C_1^2 - MC_1^2}{2}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4S^2_{\Delta MQC_1} = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{16}{9}x^2\right)\left(\frac{16}{9}a^2 + 1\right) - \left(\frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{16}{9}x^2 + \frac{16}{9}a^2 + 1 - \left[1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + 4ax + \frac{16}{9}a^2 + \frac{32}{9}ax + \frac{16}{9}x^2\right]}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{16}{9}x^2 + \frac{x^2}{a^2} + \left|\frac{16}{9}\right|^2 x^2 a^2 + \frac{16}{9}x^2 - \left(\frac{\frac{2x}{a} - 4ax - \frac{32}{9}ax}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{32}{9}x^2 + \frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{16}{9}\right)^2 x^2 a^2 - \left(\frac{x}{a} - \frac{34}{9}ax\right)^2 =$$

$$= \frac{32}{9}x^2 + \frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{16}{9}\right)^2 x^2 a^2 - \frac{x^2}{a^2} - \left|\frac{34}{9}\right|^2 a^2 x^2 + \frac{68}{9}x^2 =$$

$$= \frac{100}{9}x^2 - \frac{34^2 - 16^2}{81}a^2x^2 = \frac{100}{9}x^2 - \frac{900}{81}a^2x^2 = \frac{100}{9}x^2 - \frac{100}{9}a^2x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta MQC_1} = \sqrt{\frac{25}{9}x^2 - \frac{25}{9}a^2x^2} = \frac{5}{3}x\sqrt{1-a^2}$$

16) Дано: $AB = x$; $CC_1 = y$

Поскольку, центр вписанной окружности ΔHKC_1 = $= \Delta MQC_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{\Delta HKC_1} = S_{\Delta MQC_1}$$

olymp.bmstu.ru

17) продолжение №5

17) по Т. Пифагора:

$HC_1 = \sqrt{HC^2 + HH_1^2} = \sqrt{(a+x)^2 + \frac{96}{9}(a+x)^2} = \frac{5}{3}(a+b)$

18) $\triangle AMN \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MN = 2\sqrt{1-a^2} \cdot \frac{a-x}{a}$

19) $S_{\triangle MC_1N} = \frac{1}{2} HC_1 \cdot MN \ (m.к.\ HC_1 \perp MN) = \frac{5}{3} \cdot \frac{(x-t)}{a} \cdot \sqrt{1-a^2}$

20) $S_{сечения} = S_{\triangle MC_1} + S_{\triangle MC_1N} + S_{\triangle C_1AN} =$

$= \frac{5}{3} \cdot 2x \cdot \sqrt{1-a^2} + \frac{5}{3} \cdot \frac{a^2-x^2}{a} \cdot \sqrt{1-a^2} = \frac{5}{3}\sqrt{1-a^2} \cdot \frac{a^2-x^2+2ax}{a}$

21) $\frac{S_{сечения}}{S_{основания}} = \frac{\frac{5}{3}\sqrt{1-a^2} \cdot \frac{a^2-x^2+2ax}{a}}{\frac{1}{2} BD \cdot AC} = \frac{\frac{5}{3}\sqrt{1-a^2} \cdot \frac{a^2-x^2+2ax}{a}}{\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-a^2} \cdot 2a} = \frac{35}{24} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{5(a^2-x^2+2ax)}{6a^2} = \frac{35}{24} \Leftrightarrow \frac{a^2-x^2+2ax}{a^2} = \frac{7}{4} \Leftrightarrow 3a^2-8ax+4x^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = \frac{4x \pm 2x}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2x \\ a = \frac{2}{3}x - \text{невозможно, т.к. } a > x \end{cases} \Leftrightarrow a = 2x$

22) A_1C – проекция AA_1 на $(ABC) \Rightarrow \widehat{(AA_1;(ABC))} = \angle(AA_1C)$

23) $\operatorname{tg}\angle(AA_1C) = \frac{CC_1}{AC} = \frac{\frac{1}{3}(a+x)}{2a} = \frac{2(a+x)}{3a} = 2\frac{(2x+b)}{3 \cdot 2x} = \frac{6x}{6x} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle(AA_1C) = \widehat{(AA_1;(ABC))} = 45^\circ$

Ответ: $\widehat{(AA_1;(ABC))} = 45^\circ$

